ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по научной специальности

# **1.1.1. - Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

**Анализ I (Математический анализ)**

1. Верхний и нижний пределы последовательности.
2. Дифференцируемость в точке функции f: Rn Rm. Дифференциал и частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.
3. Кривая и критерий спрямляемости кривой. Длина непрерывно дифференцируемой кривой.
4. Теорема существования и дифференцируемости неявной функции (F(x,y)=0, F: Rn Rm Rm).
5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
6. Почленное дифференцирование на отрезке функционального ряда.
7. Формула замены переменных в кратном интеграле Римана (общая схема)

**Анализ II (Вещественный анализ)**

1. Теорема Кантора-Бернштейна. Сравнение мощностей любых множеств. Существование множества мощности большей, чем мощность данного множества.
2. Продолжение мера с полукольца на порожденное им кольцо, с сохранением при этом -аддитивности.
3. Лебегово продолжение меры, заданной на полукольце.
4. Измеримые функции и действия над ними.
5. Теорема Егорова.
6. Теорема Лебега о сходимости по мере сходящейся почти всюду последовательности.
7. Теорема Ф. Рисса о сходимости почти всюду подпоследовательности сходящейся по мере последовательности.
8. Теорема Лузина.
9. Определение и основные свойства интеграла Лебега (аддитивность, монотонность, эквивалентность интегрируемости и абсолютной интегрируемости). Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
10. Интегрируемость на ограниченном измеримом множестве ограниченной измеримой функции. Счетная аддитивность интеграла Лебега.
11. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
12. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
13. Теорема Беппо-Леви.
14. Лемма Фату.
15. Произведение мер. Теорема Фубини.
16. Функции с ограниченным изменением.
17. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.
18. «Малая теорема Фубини».
19. Производная неопределенного интеграла Лебега.
20. Абсолютно непрерывные функции.
21. Теорема Лебега о восстановление абсолютно непрерывной функции по её производной.
22. Теорема Радона-Никодима.
23. Интеграл Римана-Стильтьеса и интеграл Лебега-Стильтьеса.
24. Банахово пространство Lp(a,b) (1p<).
25. Банахово пространство существенно ограниченных измеримых функций L (a,b).
26. Теорема о пополнении метрических пространств.
27. Теорема Бэра-Хаусдорфа о категориях. Применение к существованию нигде не дифференцируемой непрерывной функции.
28. Компактные, счетно-компактные, секвенциально -компактные, предкомпактные пространства. Компактное пространство, как пространство с непустым пересечением каждой центрированной системы замкнутых подмножеств.
29. Основная теорема о компактности метрических пространств (Теорема об эквивалентности компактности, счётной компактности, секвенциальной компактности пространств и полной ограниченности полных метрических пространств).
30. Критерий предкомпактности множеств в полном метрическом пространстве.
31. Теорема Арцела об относительной компактности множеств непрерывных функций..
32. Компактность ограниченных замкнутых множеств, как характеристическое свойство конечномерности нормированного пространства.
33. Топологические пространства. Различные способы задания топологии в пространстве.
34. Полнота пространства линейных ограниченных операторов относительно сходимости по норме.

**Анализ III (Комплексный анализ)**

1. Пути и кривые. Основные свойства: Жордановые, непрерывно-дифференцируемые, гладкие, спрямляемые. Достаточное условие спрямляемости кривой.
2. Области. Лемма о том, что любые две точки области можно соединить ломанной. Теорема Жордана (без доказательства). Классификация областей на основе теоремы Жордана.
3. Дифференцируемость комплекснозначной функции. Условие Коши-Римана. Аналитические функции.
4. Интеграл. Основные свойства интеграла: линейность, инвариантность относительно замены параметра, ориентированность, оценка интеграла и почленное интегрирование функциональных рядов.
5. Теорема Коши для односвязной области. Обобщение теоремы Коши на случай не односвязных областей.
6. Интегральная теорема Коши. Следствия: теорема о среднем.
7. Теорема о представлении голоморфных функций в виде степенного ряда(Тейлора). Следствия: неравенство для коэффициентов ряда Тейлора, теорема Лиувилля.
8. Степенной ряд. Формула Коши-Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда в круге его сходимости.
9. Гомоморфность производной голоморфной функции. Следствия: бесконечная дифференцируемость голоморфной функции, формулы для коэффициентов ряда Тейлора(через производную и через интеграл).
10. Теорема Морера. Три эквивалентных определения голоморфных функций.
11. Теорема единственности
12. Теорема Вейерштрасса о почленном дифференцировании рядов.
13. Ряды Лорана.Изолированные особые точки и их классификация на основе рядов Лорана.
14. Вычеты. Теорема Коши о вычетах, вычисление вычетов в полюсах, применение вычетов к вычислению интегралов.
15. Аналитический элемент. Продолжение аналитических элементов. Конкретизация продолжения. Продолжение вдоль пути.
16. Аналитическая функция, ветви аналитической функции. Равенство аналитических функций и действия над аналитическими функциями. Выделение ветвей аналитических функций. Выделение ветвей аналитических функций.
17. Принцип аргумента. Следствие: теорема Рунге, основная теорема алгебры.
18. Принцип максимума модуля и лемма Шварца.
19. Конформное отображение. Конформное отображение элементарными функциями

**Анализ IV (Функциональный анализ)**

1. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).
2. Теорема Банаха об обратном операторе. Принцип открытости отображения.
3. Теорема Банаха о замкнутом графике.
4. Принцип продолжения Хана-Банаха.
5. Полнота пространств линейных ограниченных операторов относительно поточечной сходимости. Критерий поточечной сходимости.
6. Общий вид линейных функционалов в С[0,1] (теорема Ф. Рисса).
7. Общий вид линейных функционалов в Lp(0,1).
8. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве (теорема Ф. Рисса).
9. Сопряженные пространства. Рефлексивные пространства. С[0,1] как пример нерефлексивного пространства.
10. Слабая сходимость и слабая топология в нормированном пространстве. Единственность слабого предела. Ограниченность норм слабо сходящейся последовательности.
11. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве.
12. Слабая компактность шара из пространства, сопряженного к сепарабельному.
13. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве.
14. Базисы в гильбертовом пространстве, ортогонализация. Полнота и замкнутость.
15. Теорема Рисса-Фишера. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
16. Ортогональные системы функций в L2. Условие Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье-Лебега в точке.
17. Интегральная формула Фурье. Преобразование Фурье и формула обращения. Условие Дини.
18. Обобщенные функции. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями.
19. Вполне непрерывные операторы.
20. Абсолютная норма оператора. Класс Шмидта. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта.
21. Альтернатива Фредгольма.
22. Проектирующие операторы. Свойства.
23. Спектр оператора. Резольвента.
24. Симметрические операторы (действительность собственных значений, ортогональность собственных элементов, отношение порядка между симметрическими операторами, существование предела монотонной последовательности).
25. Спектральная теорема для симметрического вполне непрерывного оператора.
26. Спектральная теорема для симметрического ограниченного оператора.
27. Спектральная теорема для унитарного оператора.
28. Спектр симметрического ограниченного оператора.
29. Спектр и резольвента неограниченных операторов.

**Анализ V (Алгебра и топология)**

1. Группы, алгебры и кольца. Свободные группы и соотношения.
2. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
3. Поля и их алгебраические расширения. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
4. Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли.
5. Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса.
6. Фундаментальная группа. Односвязность. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие.
7. Гомологии и когомологии симплициальных комплексов. Их гомотопическая инвариантность. Группы гомологий и фундаментальная группа компактных двумерных поверхностей, их классификация.
8. Локально тривиальные и векторные расслоения. Пространства путей и петель. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа и классификация отображений 3-мерной сферы в 2-мерную.
9. Степень отображения и индекс особой точки векторного поля. Индекс пересечения и коэффициент зацепления. Эйлерова характеристика.

## **Литература**

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 7е изд., 2004.*
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ, М., Наука, 3е изд., 1984.*
3. *Иосида К., Функциональный анализ.М., URSS, 3е изд., 2010.*
4. *Садовничий В.А., Теория операторов. М., Дрофа, 5изд., 2004.*
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.*
6. *Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной.СПб., Лань, 2008.*
7. *Рудин У., Основы математического анализа. М.,Мир, 2изд., 1976.*
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1973..*
9. *Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, СПб., Лань, 2009. Том 1,2.*
10. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998.*

***10.*** *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.*

*11. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М., Наука, 1973.*

*12. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1976.*

*14. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М., МГУ, 1980.*

**Дополнительные вопросы**

к кандидатскому минимуму по специальности 01.01.01 –

математический анализ

1. Понятие мультиотображения. Возникновение мультиотображений в различных областях математики.
2. Полунепрерывные сверху мультиотображения. Условия полунепрерывности сверху. Примеры.
3. Замкнутые мультиотображения. Условия замкнутости. Примеры.
4. Взаимосвязь замкнутых и полунепрерывных сверху мультиотображений.
5. Метрика Хаусдорфа. Критерий непрерывности мультиотображения.
6. Пересечение полунепрерывных сверху и замкнутых мультиотображений.
7. Понятие квазиоткрытого мультиотображения. Теорема о связи квазиоткрытости и полунепрерывности снизу.
8. Теорема о пересечении квазиоткрытого и полунепрерывного снизу мультиотображения. Теорема о пересечении полунепрерывных снизу мультиотображений.
9. Композиция мультиотображений. Свойства непрерывности композиции.
10. Декартово произведение мультиотображений. Свойства непрерывности декартова произведения.
11. Операции суммы и произведения мультиотображения на функцию и их свойства непрерывности.
12. Теорема максимума .
13. Понятия непрерывного сечения и однозначной аппроксимации мультиотображения. Теорема Майкла о сечении (без доказательства). Теорема о существовании аппроксимации.
14. Теорема Надлера о неподвижной точке сжимающего мультиотображения.
15. Существование однозначных гомотопических аппроксимаций.
16. Конструкция топологической степени мультиотображения.
17. Основные свойства топологической степени мультиотображений.
18. Основные теоремы о неподвижной точке мультиотображений.
19. Существование равновесия в играх двух лиц..
20. Модель конкурентной экономики. Конкурентное равновесие.
21. Теорема об избыточном спросе.
22. Существование равновесия в модели конкурентной экономики.
23. Понятие измеримой мультифункции. Теорема о критериях измеримости.
24. Условия Каратеодори и лемма Филиппова.
25. Мультиоператор суперпозиции. Суперпозиционная селектируемость.
26. Теорема о замкнутости мультиоператора суперпозиции.
27. Локальная теорема существования для дифференциальных включений.
28. Глобальная теорема существования для дифференциальных включений.
29. Применения к существованию оптимальных решений управляемых систем.
30. Меры некомпактности и уплотняющие мультиотображения.
31. Фундаментально сужаемые мультиотображения и их основные свойства.
32. Топологическая степень фундаментально сужаемых и уплотняющих мультиотображений.
33. Основные теоремы о неподвижной точке фундаментально сужаемых и уплотняющих мультиотображений.
34. Приложения уплотняющих мультиотображений к дифференциальным включениям в банаховом пространстве.

***Л И Т Е Р А Т У Р А***

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В., Введение в теорию многозначных*

*отображений и дифференциальных включений, М. Либроком, 2е изд., 2011.*

1. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., Наука, 1975.*
2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н., Меры некомпактности и уплотняющие операторы, Новосибирск, Наука, 1986.*
3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В., Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений, УМН, 35 (1980), №1, 59-126.*